Zwei Gitter

Klaus Nagel

2. Februar 2007

1 Problembeschreibung

Am 4. Januar 2007 stellte Wolfgang Thumser dieses Problem in der Newsgroup de.sci.mathematik vor:

> Man betrachte die Menge aller Gitterpunkte $G := Z \times Z$ mit ganzzahligen Koordinaten und drehe all diese Punkte um 45^0 um den Ursprung. Die entstehende Menge der gedrehten Gitterpunkte sei H. Aus einem Grund, der sich immer zu wiederholen lohnt, gilt $G \cap H = (0,0)$. G und H sind durch die Drehung bijektiv aufeinander abgebildet.
>
> Hier kommt die Frage: Können G und H bijektiv auch so aufeinander abgebildet werden, daß sich der euklidische Abstand zwischen Punkt und Bildpunkt durch eine Konstante universell beschränken läßt?

In diesem Aufsatz wird eine spezielle Bijektion vorgeschlagen. Von dieser wird gezeigt, daß das cos(22.5°)-fache des Rastermaßes eine obere Schranke für den Abstand zwischen Punkt und Bildpunkt ist.

2 Streifenweise Bijektion

Um beide Gitter gleichberechtigt zu behandeln, werden sie in ein kartesisches xy-Koordinatensystem gelegt, wobei das Gitter G um 22.5^0 nach links gedreht wird, das Gitter H um den gleichen Winkel nach rechts. Die um $\pm 22.5^0$ gegen die y-Achse gedrehten Rasterlinien sollen g-Linien beziehungsweise h-Linien heißen. d-Linien sind parallel zu den g-Linien und laufen diagonal durch die Quadrate des H-Gitters. *Abbildung 1* zeigt die beiden Gitter in getrennten Koordinatensystemen; beim H-Gitter ist die Richtung der d-Linien angedeutet.

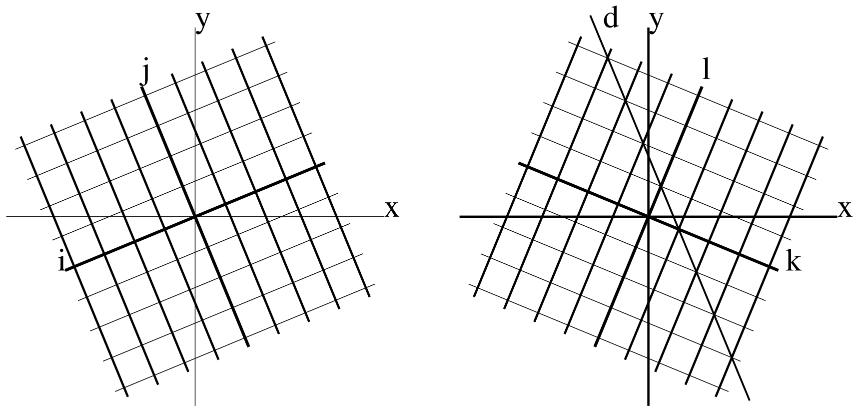

Abbildung 1: G-Gitter und H-Gitter, einzeln dargestellt

Die Ebene wird in waagerechte Streifen der Breite 1 eingeteilt. Der Streifen n ist definiert durch $n - 1/2 \leq y < n + 1/2$.
m_s bezeichne die Mittellinie des Streifens s. Das Rastermaß wird so skaliert, daß sich zwei Nachbarpunkte in einer Koordinate genau um 1 unterscheiden; das Maß ist also $1/cos(22.5^0)$. Durch diese Wahl enthält jede g-Linie in jedem Streifen genau einen Rasterpunkt. Entsprechendes gilt für das H-Gitter.
G sei ein Punkt des G-Gitters, er liege im Streifen s auf der g-Linie g. $P = g \cap m_s$ sei der Schnittpunkt von g-Linie g und Mittellinie m_s. $Q = h \cap m_s$ sei der zu P nächstgelegene Schnittpunkt einer h-Linie. Im Anhang wird bewiesen, daß diese Zuordnung eindeutig ist. H sei der H-Punkt auf h im Streifen s. Die Zuordnung $G \leftrightarrow H$ ist eine Bijektion mit beschränktem Abstand.

3 Maximaler Abstand

Im Streifen Null schneiden g-Linien und h-Linien einander auf der x-Achse.Daher findet man zu jedem Punkt in diesem Streifen seinen Partner als sein Spiegelbild an der x-Achse. Hier ist die Streifenbreite offensichtlich eine obere Schranke für den Abstand zwischen Bild und Urbild. Im Folgenden wird gezeigt, daß diese Schranke universell gilt. Sei G ein Punkt im Gitter G auf der g-Linie g. Der Schnittpunkt von g mit der Streifenmitte m_s sei P_0. Die zugeordnete h-Linie

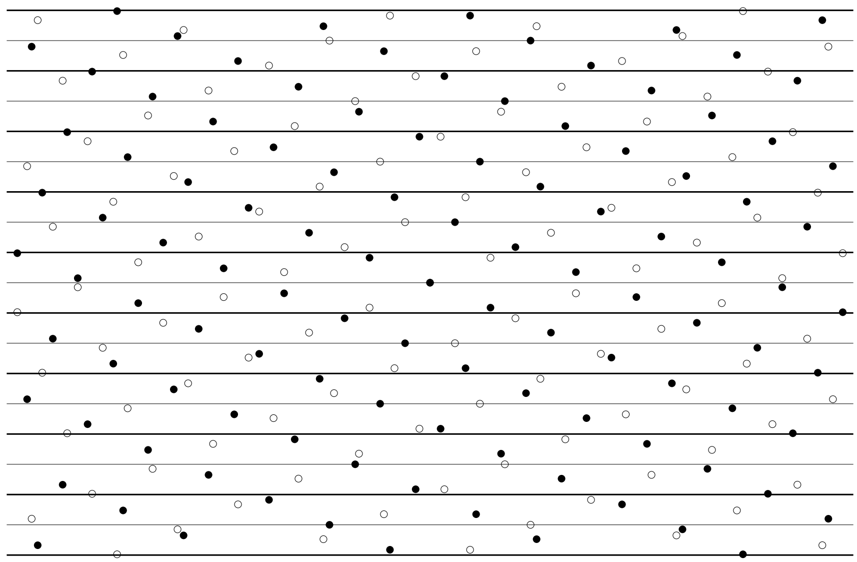

Abbildung 2: Gitter und Streifen

schneidet m_s in maximal einer halben Abstand zu den Nachbarschnittpunkten P_{-1} und P_1. Die Konstruktion dieser Grenzen geht aus *Abbildung 3* hervor:
Der Punkt G liege zwischen A und B auf der g-Linie g. Über AB konstruiert man die Quadrate $ABDC$ und $AEFB$ mit den Mittelpunkten M_{-1} und M_1. Die Parallelen zu g durch M_{-1} und M_1 schneiden die Streifenmittellinie m_s in P_{-1} und P_1. P_{-1} und P_1 sind die Grenzen für die Schnittpunkte der g zugeordneten h-Linie. Der einem Punkt G auf der g-Linie g zugeordnete Punkt H muß also in dem stark umrandeten Parallelogramm $L_{-1}L_1K_1K_{-1}$ liegen.
Eine obere Schranke für den Abstand zwischen G und H in diesem Parallelogramm ist die Länge $|AL_{-1}| = |BL_1|$. Allerdings kommt es nicht vor, daß G sehr nahe bei A liegt und gleichzeitig H sehr nahe bei L_{-1}. Das wird jetzt gezeigt. Der zugehörige Punkt H liegt auf einer zu g parallelen d-Linie d. Um d zu konstruieren, betrachten wir den Punkt G_0 auf g im Streifen 0 *(Abbildung 4)*. Der Partner von G_0 ist H_0, sein Spiegelbild an der x-Achse. Die gesuchte d-Linie ist die Parallele zu g durch H_0. G hat den gleichen Abstand von der Mittellinie m_s wie G_0 von der x-Achse m_0, denn so wurde das Rastermaß gewählt. Daher erhält man die d-Linie auch schon, indem man G an m_s spiegelt und durch den Spiegelpunkt G' die Parallele zu g legt. H liegt auf d oder auf der nächsten d-Linie. Der größtmögliche Abstand würde eintreten, wenn H in eine der Ecken L_{-1} oder K_1 fiele. Dieser Fall tritt zwar nicht wirklich auf, weil außer im Nullpunkt alle Gitterpunktkoordinaten irrational sind, er liefert aber eine Schranke. Aus Symmetriegründen können wir uns auf die Ecke L_{-1} beschränken. *Abbildung 5* zeigt für diesen Fall die Lage von

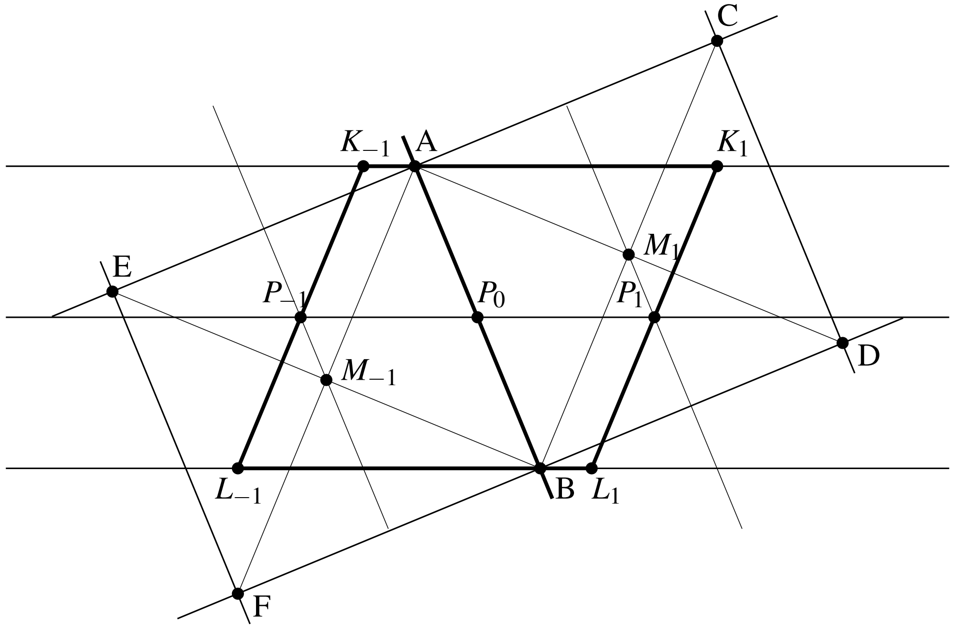

Abbildung 3: Grenzen für Punkt H

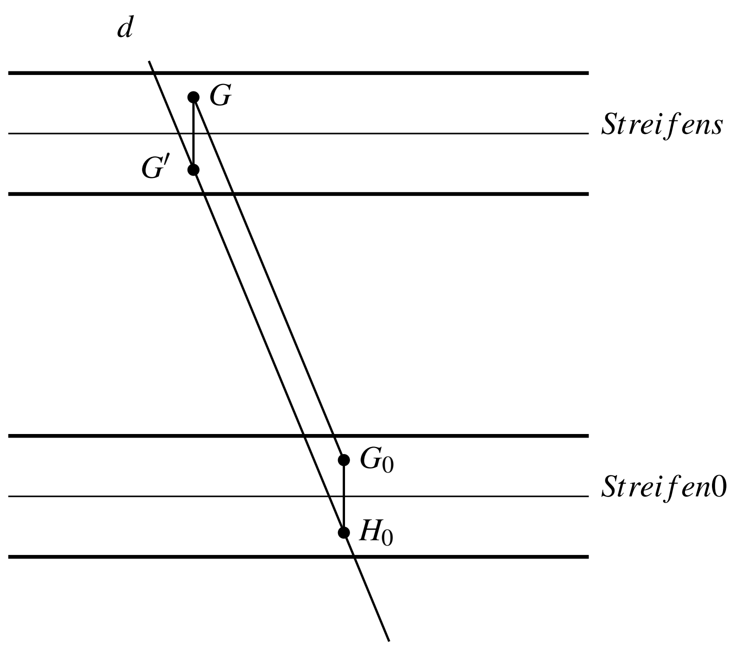

Abbildung 4: Konstruktion der d-Linie

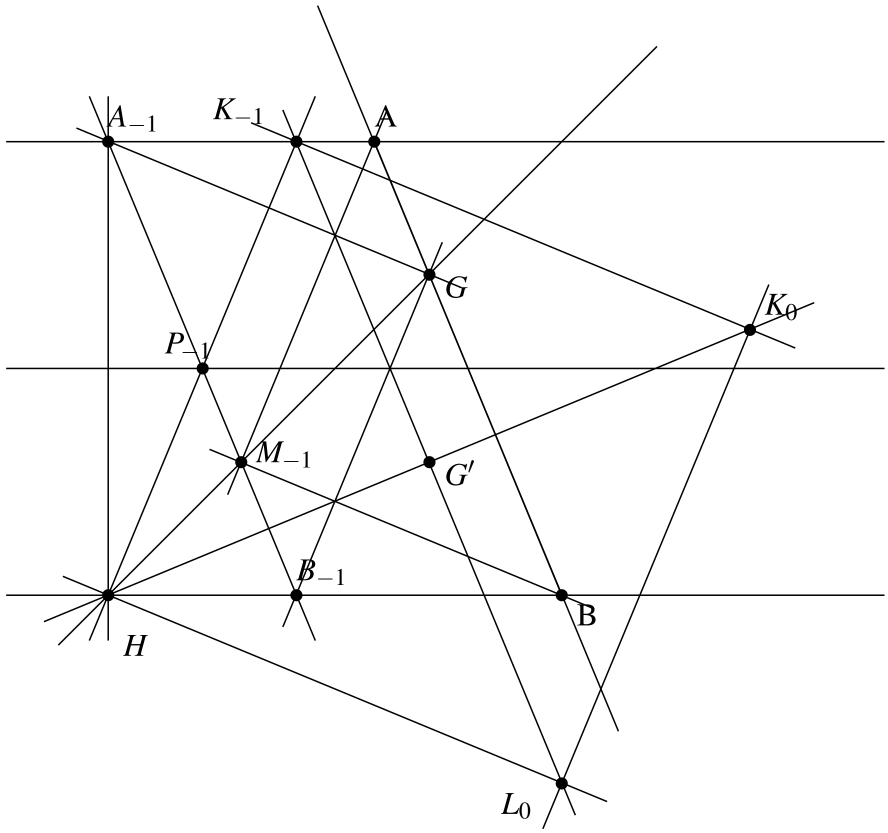

Abbildung 5: Extremlage: $H = L_{-1}$

G; die Bezeichnungen aus *Abbildung 3* wurden beibehalten.
Durch H ist das H-Gitterquadrat $HK_{-1}K_0L_0$ festgelegt, die d-Linie geht durch die Ecken K_{-1} und L_0, ebenfalls durch die Mitte G'. M_{-1} ist die Spitze des gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks $AM_{-1}B$. Umgekehrt liegt daher die Spitze G des entsprechenden Dreiecks $B_{-1}GA_{-1}$ auf der Geraden AB. Die Dreiecke $B_{-1}GA_{-1}$ und $HG'K_{-1}$ gehen durch Spiegelung auseinander hervor. G und G' sind Spiegelpunkte; der Punkt H auf der übernächsten d-Linie ist daher das bijektive Bild von G. Die Gerade HK_{-1} steht senkrecht auf $A_{-1}G$ und sie halbiert den Winkel $A_{-1}HG$. Das Dreieck $A_{-1}HG$ ist daher gleichschenklig und der Abstand $|HG|$ ist gleich der Streifenbreite $|HA_{-1}|$.

4 Anhang

4.1 Beispiele für große Abstände

Wählt man 1 als Rastermaß, dann ist die Streifenbreite $cos(22.5^0) = 0.92387953...$ Dieser Schranke kommen die Abstände zwischen Bild un Urbild beliebig nahe. So kommt etwa für den G-Gitterpunkt mit den Koordinaten $i = -16730$ $j = 73852$ und und seinem Partner mit den H-Gitterkoordinaten $k = -40391$ und $l = 64052$ der Abstand bis auf einen Faktor 0.999994 an diese Schranke heran.
Hugo Pfoertner hat Rekursionsformeln für Gitterkoordinaten geliefert, so daß sich die Abstände der Partner immer mehr der Schranke nähern. Dabei handelt es sich nicht um die trivialen Fälle im Streifen Null:

$$
\begin{aligned}
i(n) &= 6 * i(n-1) - i(n-2) - 2, \quad i(0) = 0, \quad i(1) = 0 \\
j(n) &= 6 * j(n-1) - j(n-2), \quad j(0) = 1, \quad j(1) = 2 \\
k(n) &= 6 * k(n-1) - k(n-2), \quad k(0) = 0, \quad k(1) = -1 \\
l(n) &= 6 * l(n-1) - l(n-2) - 2, \quad l(0) = 0, \quad l(1) = 2
\end{aligned}
$$

Das ergibt diese Folgen:

i	j		k	l
0	2	$\leftrightarrow$	-1	2
-2	11	$\leftrightarrow$	-6	10
-14	64	$\leftrightarrow$	-35	56
-84	373	$\leftrightarrow$	-204	324
-492	2174	$\leftrightarrow$	-1189	1886
-2870	12671	$\leftrightarrow$	-6930	10990
-16730	73852	$\leftrightarrow$	-40391	64052
-97512	430441	$\leftrightarrow$	-235416	373320
-568344	2508794	$\leftrightarrow$	-1372105	2175866

4.2 Eindeutigkeit

Es fehlt noch der Beweis, daß die Zuordnung einer h-Linie zu einer g-Linie eindeutig ist. Dazu wird gezeigt, daß der Schnittpunkt einer g-Linie mit einer Mittellinie m_s nicht genau in der Mitte zwischen zwei Schnittpunkten von m_s mit zwei benachbarten h-Linien liegen kann. Die xy-Koordinaten berechnen sich aus den Gitterkoordinaten als:

$$
\begin{aligned}
x = -i - jT \quad y = j - iT \quad &\text{für das G-Gitter} \\
x = k + jT \quad y = l - kT \quad &\text{für das H-Gitter}
\end{aligned}
$$

Dabei ist $T = tan(22.5^0)$. T hat einige interessante Eigenschaften. Aus dem Additionstheorem für den Tangens folgt

$$tan(45^0) = 1 = 2 * T/(1 - T^2)$$

also

$$1 - T^2 = 2T \tag{1}$$

oder

$$T^2 = 1 - 2T \tag{2}$$

Division durch T liefert

$$1/T = 2 + T \tag{3}$$

Auflösung dieser Gleichung ergibt

$$T = \sqrt{1/2} - 1. \tag{4}$$

T ist also irrational. Für den Abstand B zweier Gitterschnittpunkte gilt

$$B = 1/cos(22.5^0)^2 = 1 + T^2 \tag{5}$$

nach (2) folgt

$$B = 2(1 - T) \tag{6}$$

Die Schnittpunkte von g-Linien und h-Linien mit der Mittellinie m_s haben x-Koordinaten der Form *[vgl. Abbildung 1)*

$$\begin{aligned} x = -sT + jB \quad & \text{für G} \\ x = sT + lB \quad & \text{für H} \end{aligned}$$

Sollte der H-Schnittpunkt genau in der Mitte liegen, dann muß gelten

$$\begin{aligned} -sT + jB &= sT + lB + B/2 && \text{(s, j und l ganzzahlig)} \\ (j - l - 1/2)B &= 2sT && \text{und wegen (6)} \\ 2(j - l - 1/2)(1 - T) &= 2sT \\ 2j - 2l - 1 &= (2s + 2j - 2l - 1)T \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Irrationalität von T.
Abbildung 6 zeigt einen größeren Ausschnitt aus dieser Bijektion. Die beiden Gitter sind mit unterschiedlichen Sybolen gezeichnet, Partner sind durch eine Linie verbunden.

4.3 Andere Winkel als 45°

Die streifenweise Bijektion läßt sich auch definieren, wenn die Gitter nicht um 45^0 gegen einander geneigt sind. Auch dann muß der H-Punkt in einem Parallelogramm liegen. Es sind aber nicht mehr die d-Linien zu den g-Linien parallel. Daher sind im Allgemeinen alle Lagen im Parallelogramm möglich.

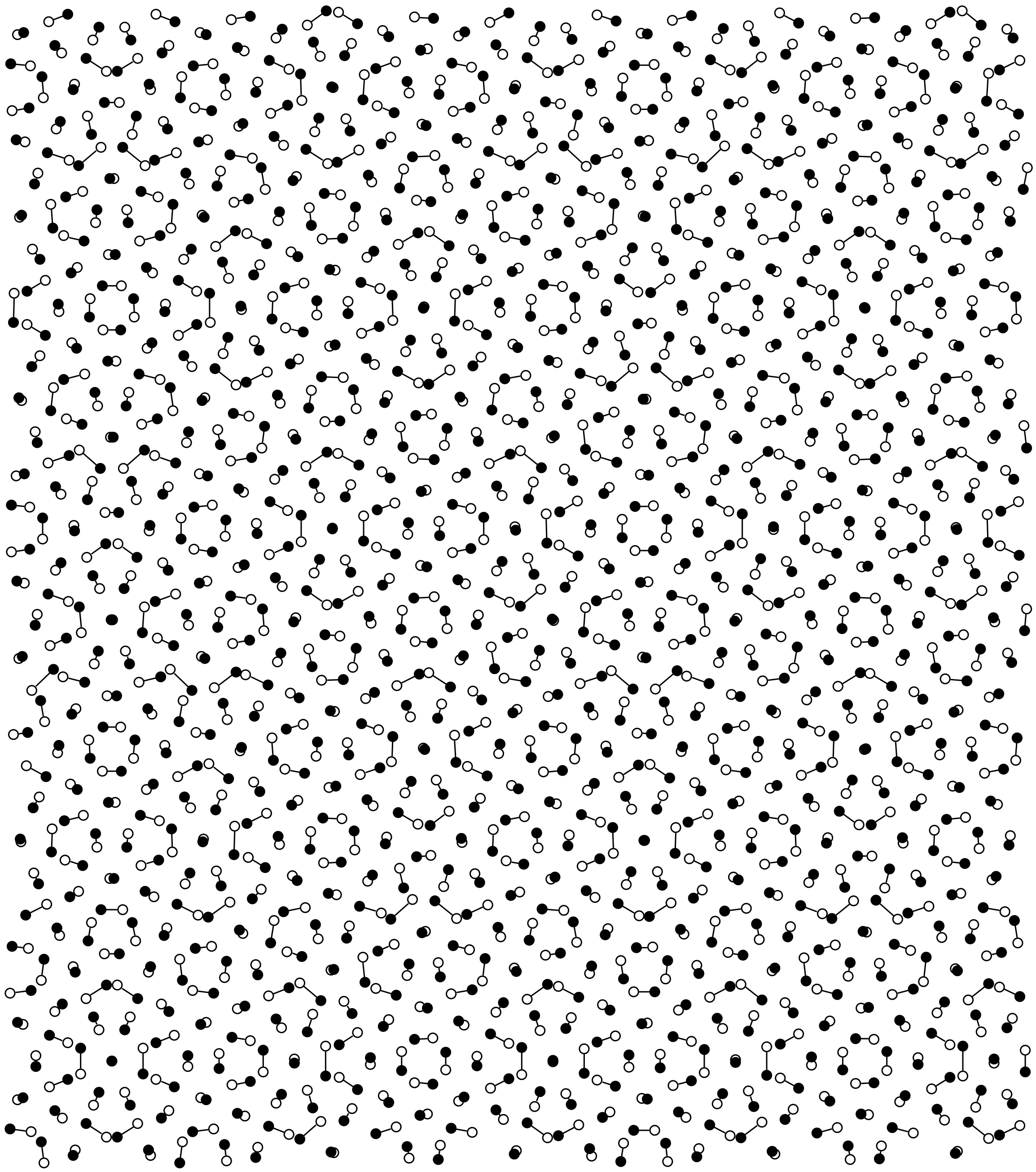

Abbildung 6: Bijektion