Zwei Gitter, Bijektion und Quadratpuzzle

Klaus Nagel

9. Juli 2007

1 Einleitung

Dieser Ausatz soll erklären, was das Quadratpuzzle mit der Bijektion zwischen zwei Gittern zu tun hat. Eine Einführung in das Problem steht in
http://nagel-klaus.homepage.t-online.de/Gitter.pdf
Das Wesentliche wird hier wiederholt.
Am 4. Januar 2007 stellte Wolfgang Thumser dieses Problem in der Newsgroup de.sci.mathematik vor:

> Man betrachte die Menge aller Gitterpunkte $G := Z \times Z$ mit ganzzahligen Koordinaten und drehe all diese Punkte um 45^0 um den Ursprung. Die entstehende Menge der gedrehten Gitterpunkte sei H. Aus einem Grund, der sich immer zu wiederholen lohnt, gilt $G \cap H = (0,0)$. G und H sind durch die Drehung bijektiv aufeinander abgebildet.
>
> Hier kommt die Frage: Können G und H bijektiv auch so aufeinander abgebildet werden, daß sich der euklidische Abstand zwischen Punkt und Bildpunkt durch eine Konstante universell beschränken läßt?

2 Einleitung

Um beide Gitter gleichberechtigt zu behandeln, wird das G-Gitter um 22.5^0 nach links, das H-Gitter um den gleichen Winkel nach rechts gedreht.
Als Rastermaß wird nicht Eins gewählt, sondern $1/cos(22.5^0)$; das vereinfacht die Berechnungen. Der Grund für diese Wahl geht aus Abbildung 2 hervor. Man bildet horizontale Streifen $S_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$ der Breite 1 um die (gestrichelte) Zentrallinie $y = i$. G- und H-Linien laufen durch die entsprechenden Gitterpunkte und sind um $\pm 22.5^0$ gegen die y-Achse geneigt. Auf jeder dieser Linien in jedem

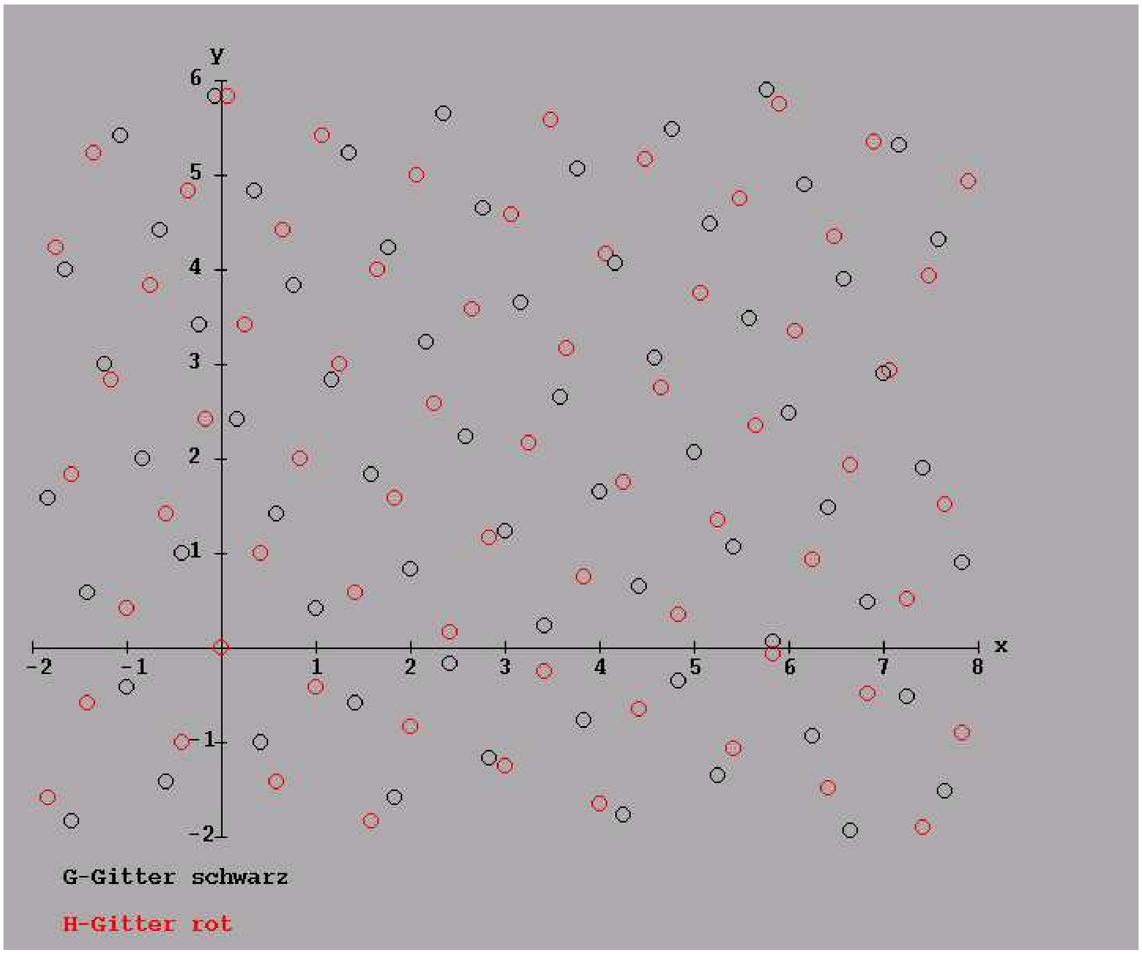

Abbildung 1: Darstellung der beiden Gitter.

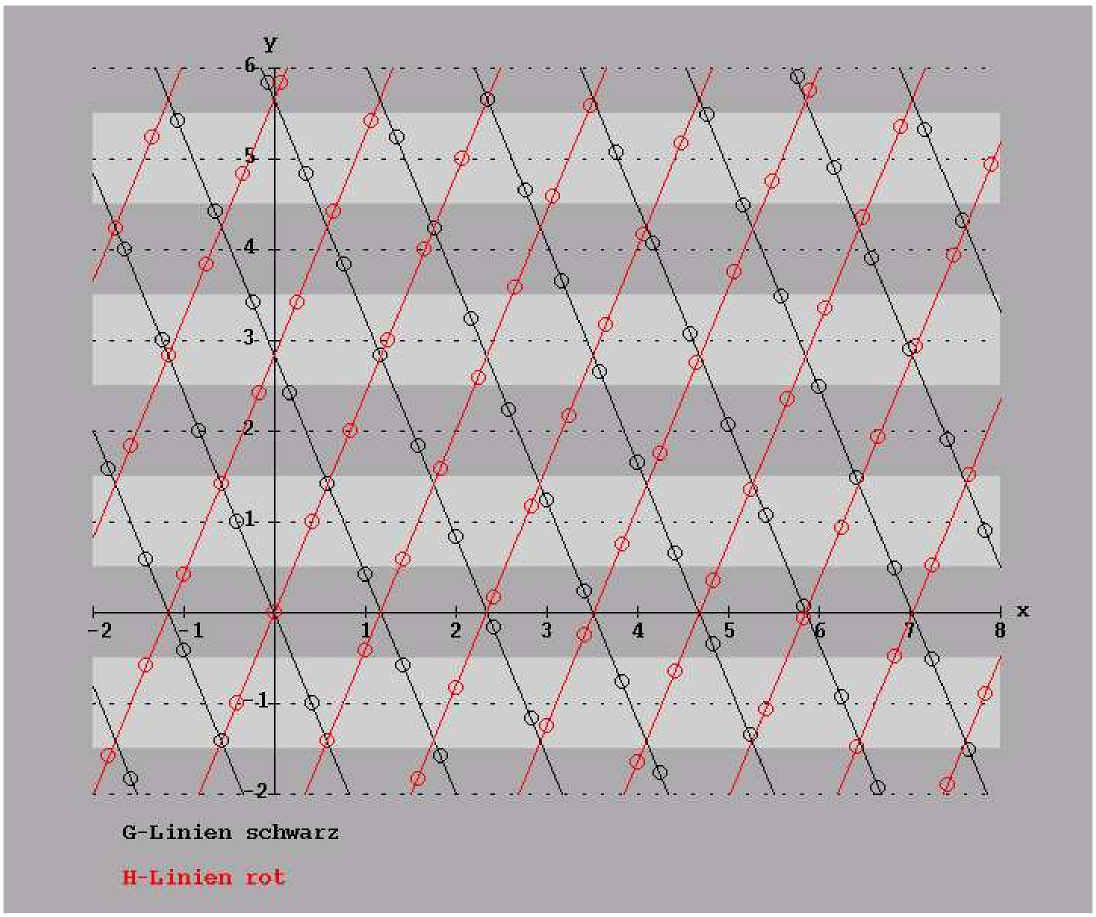

Abbildung 2: Streifen, G-Linien und H-Linien.

Streifen liegt genau ein Gitterpunkt. Nun läßt sich die streifenweise Bijektion definieren. Zu einem Punkt G im Streifen i bestimmt man die durch G gehende G-Linie und deren Schnittpunkt P mit der Zentrallinie $y = i$. Die H-Linie h mit dem nächstgelegenem Schnittpunkt Q ist eindeutig bestimmt. Der Punkt H auf h im Streifen i ist der Partner von G. In [1] wurde gezeigt, daß der Abstand zweier Partner bei der streifenweisen Bijektion kleiner als 1 ist, dieser Schranke aber beliebig nahe kommt.
Anmerkung: Bezogen auf das Rastermaß 1 wird diese Schranke zu $cos(22.5^0) = 0.92387$.

3 Drehungen eines Gitters

Die Überlegungen für waagerechte Streifen gelten ebenfalls für senkrechte. Das führte zu

Lemma 1:
Sei $D = (i, j)$ ein Punkt in der xy-Ebene, mit ganzzahligen i, j und $(i + j)$ gerade. Eine 45^0-Drehung um D führt das Gitter G in das Gitter H über.

Beweis:
Die Form der G und H-Punkte ist:

$$G = \begin{pmatrix} i - j \cdot T \\ j + i \cdot T \end{pmatrix} \quad i, j \quad ganzzahlig \tag{1}$$

$$H = \begin{pmatrix} k + l \cdot T \\ l - k \cdot T \end{pmatrix} \quad k, l \quad ganzzahlig. \tag{2}$$

Dabei ist $T = tan(22.5^0) = \sqrt{2} - 1$. Es genügt zu zeigen, daß ein einziger G-Punkt, beispielsweise $P = (0, 0)$ bei einer 45^0-Drehung um $D = (i, j)$ auf einen H-Punkt abgebildet wird. Eine Translation, die den Drehpunktes in den Nullpunkt schiebt, eine 45^0-Drehung und abschließende Rücktranslation ergeben auf P angewandt :

$$\begin{pmatrix} W & -W \\ W & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 - i \\ 0 - j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \cdot (-i + j) + i \\ -W \cdot (i + j) + j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (j + i)/2 + (j - i)/2 \cdot T \\ (j - i)/2 - (j + i)/2 \cdot T \end{pmatrix}$$

mit $W = \sqrt{2}/2 = (T + 1)/2$.
Wenn $i + j$ gerade ist, dann hat die rechte Seite genau die in (2) angegebene Form eines H-Punktes mit $k = (j + i)/2$ und $l = (j - i)/2$, q.e.d.

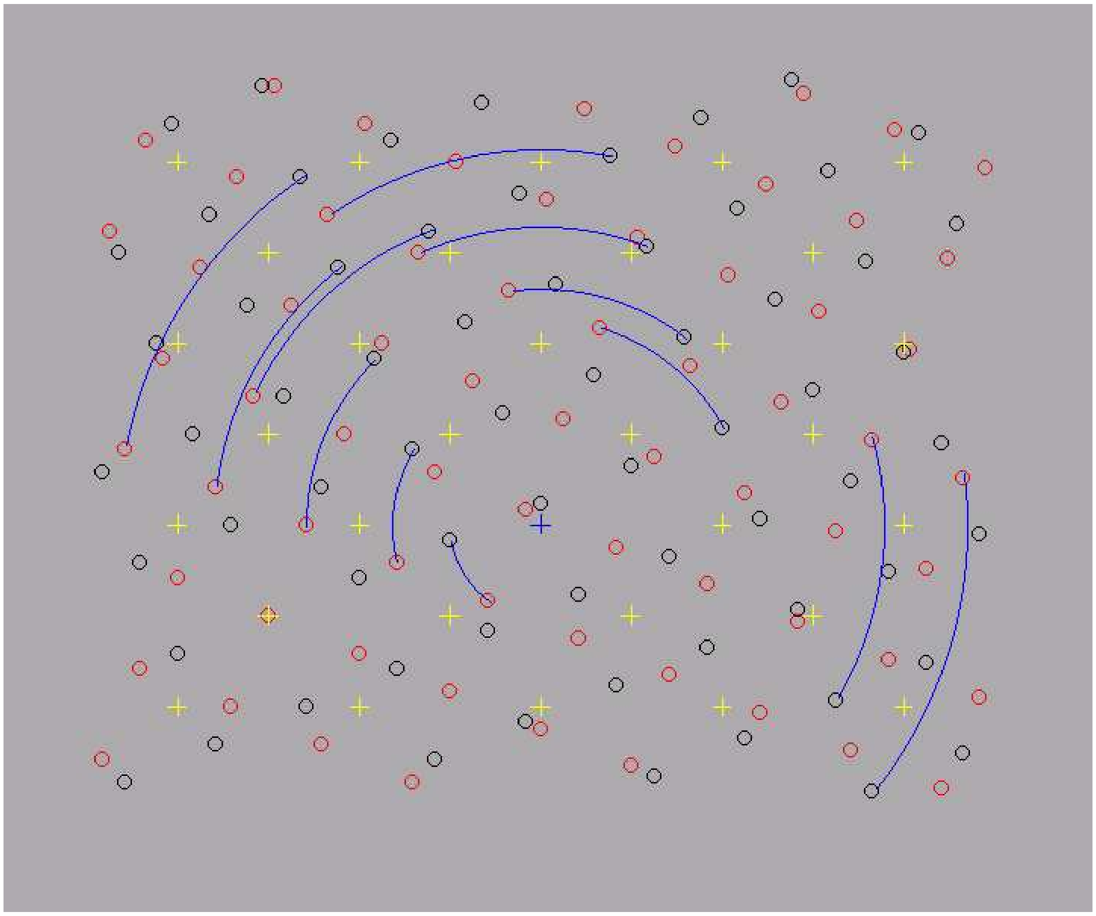

Abbildung 3: Drehpunkte und beispielhafte 45°-Drehungen.

Abbildung 3 erläutert diese Drehungen; sie zeigt die Lage einiger Drehpunkte (gelbe Kreuze) und und für den ausgewählten Drehpunkt $(1,3)$ (blaues Kreuz) einige 45^0-Bögen, die von G-Punkten zu H-Punkten führen.

4 Alternative Beschreibung der Bijektionen

Lemma 1 ermöglicht es, zu einem beliebigen G-Punkt G mit bekannten Koordinaten, einen benachbarten H-Punkt $H_0(G)$ zu finden. Man sucht dazu den zu G nächstgelegenen Drehpunkt $D(G)$ und dreht G um 45^0 um $D(G)$. Für alle Punkte G in einem auf die Spitze gestelltem Quadrat (Karo) mit Halbdiagonale 1 und um den Drehpunkt D als Zentrum ist D der nächstgelegene Drehpunkt. Abbildung 4 zeigt das Kachelmuster der Einzugsgebiete der Drehpunkte. Offensichtlich ist $H_0(G)$ niemals weiter als 1 von G entfernt. In Abbildung 5 sind die G-

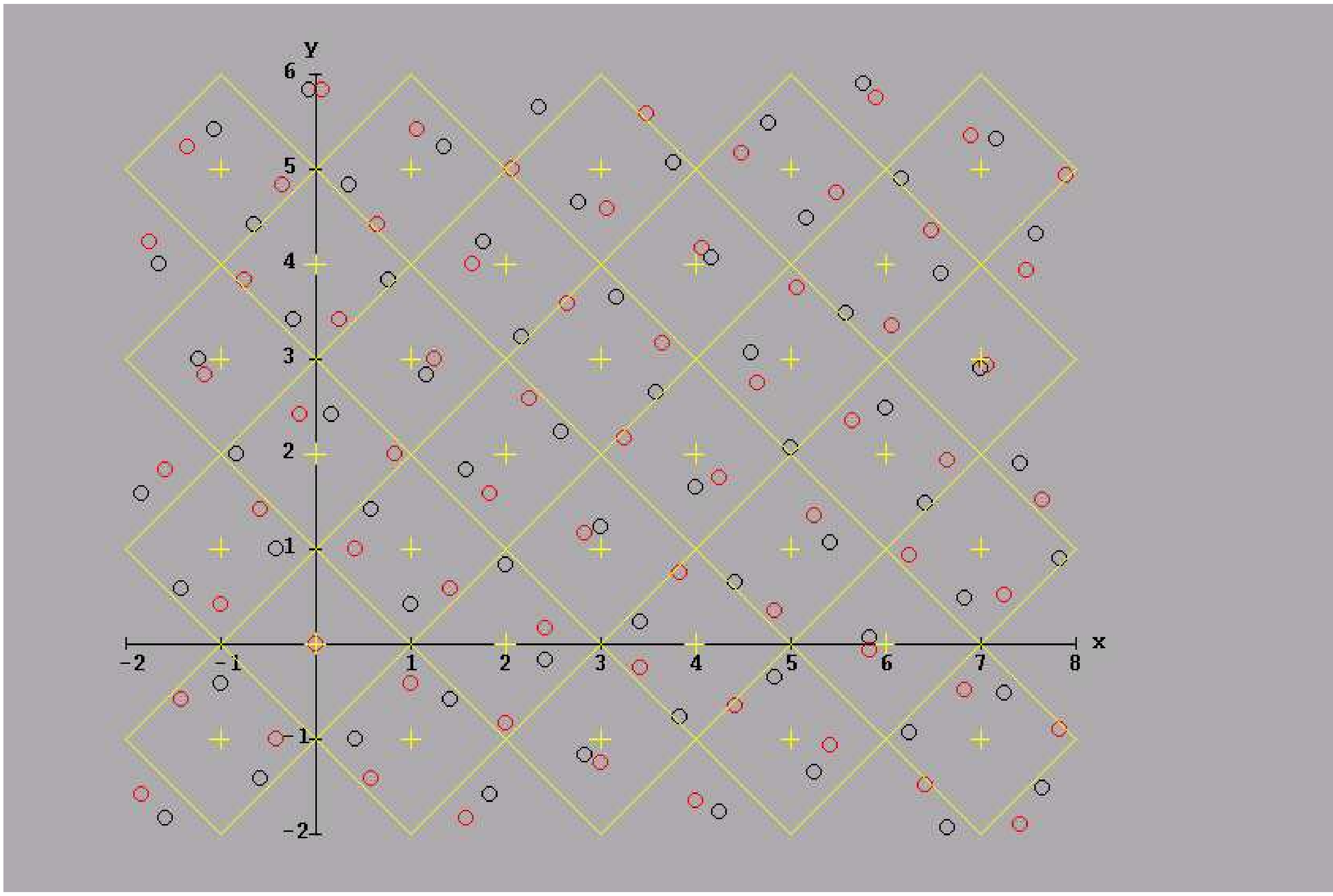

Abbildung 4: Drehpunkte mit ihren Einzugsgebieten.

Punkte G mit den zugehörigen $H_0(G)$ verbunden. Man sieht, daß die Zuordnung $G \longrightarrow H_0(G)$ nicht zu einer Bijektion gemacht werden kann, denn verschiedene G haben gelegentlich das gleiche Bild.

Eine gegebene Bijektion läßt sich beschreiben, indem man den Bildpunkt H von G relativ zu $H_0(G)$ angibt.
Sei G ein G-Punkt, D der nächstgelegene Drehpunkt. Eine Translation, die D in den Nullpunkt abbildet, führt G über in einen Punkt $\tilde{G} \in K_0$, wobei K_0 das Karo um den Nullpunkt ist. Die Zuordnung $G \longrightarrow \tilde{G}$ wird Projektion P genannt, sie ist wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ eineindeutig. Entsprechend werden die Bildpunkte H durch solche Projektionen eineindeutig nach $\tilde{H} \in K_0$ abgebildet. Der gegebenen Bijektion B zwischen den G- und H-Gitterpunkten entspricht also eine Bijektion $\tilde{B}$ zwischen den Projektionen $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$. Wie auch B besteht $\tilde{B}$ aus einer 45^0-Drehung, einer anschließender Translation V (mit Translationsvektoren

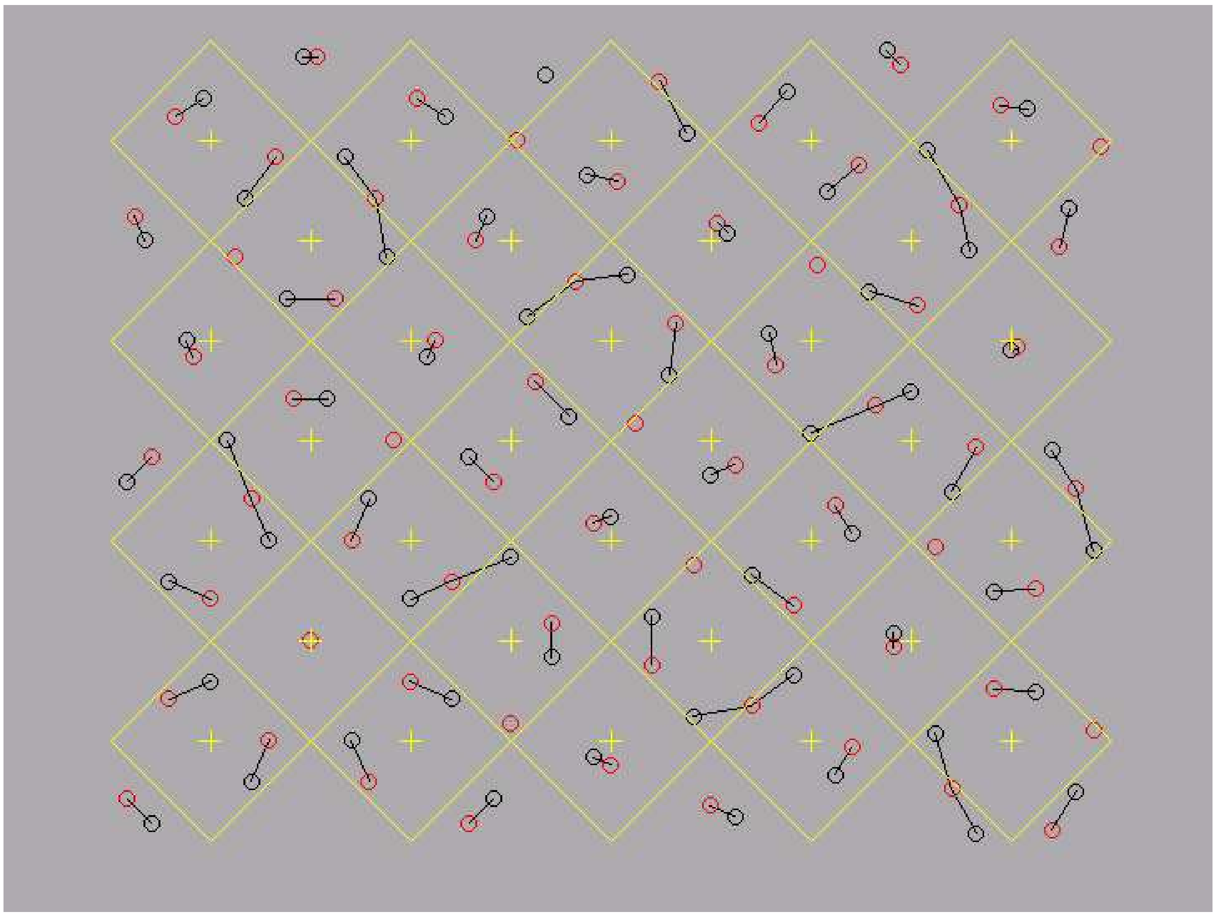

Abbildung 5: Die Zuordnung $G \longrightarrow H_0(G)$.

aus dem H-Raster) und einer abschließenden Projektion P in K_0. Die Drehung ist in allen Fällen gleich, das Bild der Drehung von $\tilde{G}$ sei $\hat{G} \in \hat{K}_0$. Die Bijektion ist daher allein bestimmt durch $P \cdot V$, die Punkte aus dem achsenparallelen Quadrat $\hat{K}_0$ in ein Karo abbilden.

5 Spezielle Bijektionen

Der Übergang von der Bijektion B zu $\tilde{B}$ bringt keine Erleichterung, wenn man statt zwischen den Gitterpunkten G und H die Zuordnung zwischen ihren Projektionen $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$ einzeln festlegen muß. Anders ist es, wenn es gelingt, wenige zusammenhängende Gebiete jeweils einheitlich abzubilden. Wenn wir uns auf Bijektionen mit kurzen Abständen beschränken, dann kommt als Bild von G nur $H_0(G)$ selbst mit seinen acht Nachbarn $H_1, H_2, \ldots, H_8$ in Frage (Abbildung 6). Das soll an Abbildung 7 erklärt werden. Bild A zeigt das Karo K_0, zu jedem Punkt wurde der gedrehte Punkt H_0 bestimmt und dessen Nachbarn $H_1, H_2, \ldots H_8$. Aus diesen H-Punkten wurde der Partner von G bei der streifenweisen Bijektion bestimmt, er muß also im gleichen Streifen liegen wie G und seine H-Linie muß die zugehörige Zentrallinie im geringsten Abstand vom Schnittpunkt der G-Linie schneiden. Aus dem Streifen und der Nummer des Nachbarn wurde die Farbe festgelegt, die in allen Bildern für die entsprechenden Gebiete benutzt wird. Bild B zeigt das um 45^0 gedrehte Karo $\hat{K}_0$. In Bild C wurden die Verschiebung um den H_i-Wert angebracht und Bild D wurden die Werte auf K_0 projiziert.
Beim Vergleich der Bilder A und C in Abbildung 7 sieht man, daß Eins der größte Abstand zwischen den Partnern ist, entsprechende Stellen in gleichfarbigen Gebieten.

6 Weiteres Vorgehen

Als nächstes soll festgestellt werden, wie sich Abbildung 7 ändert, wenn die von Rainer Rosenthal vorgeschlagenen lokalen Verbesserungen angebracht werden. Vielleicht läßt sich eine Übersicht über die möglichen Bijektionen finden und meine Vermutung bestätigen, daß $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}} = 0.9262$ die kleinste Schranke ist. Bezogen auf das Rastermaß 1 ist das 0.8557.

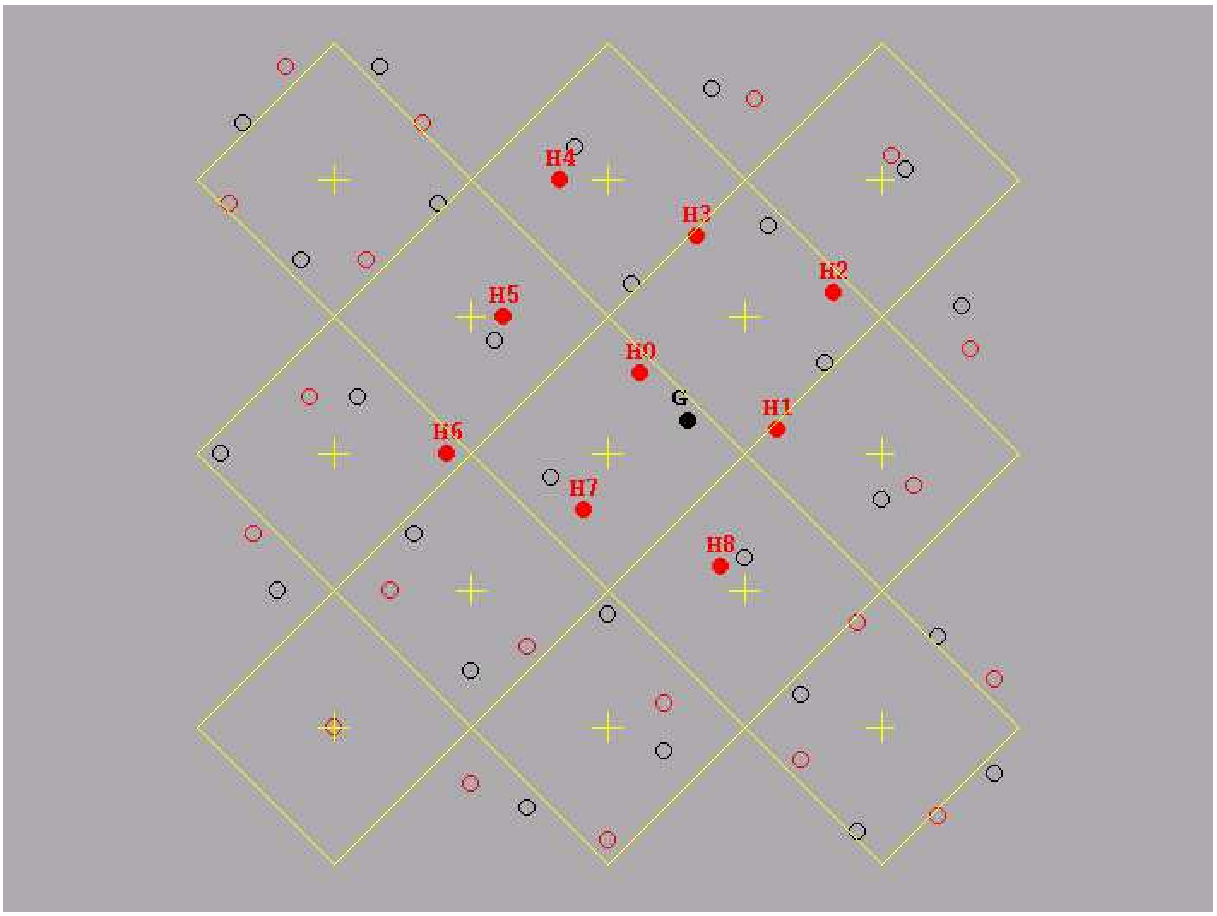

Abbildung 6: Mögliche Bilder $H_0, H_1, ...H_8$ von G.

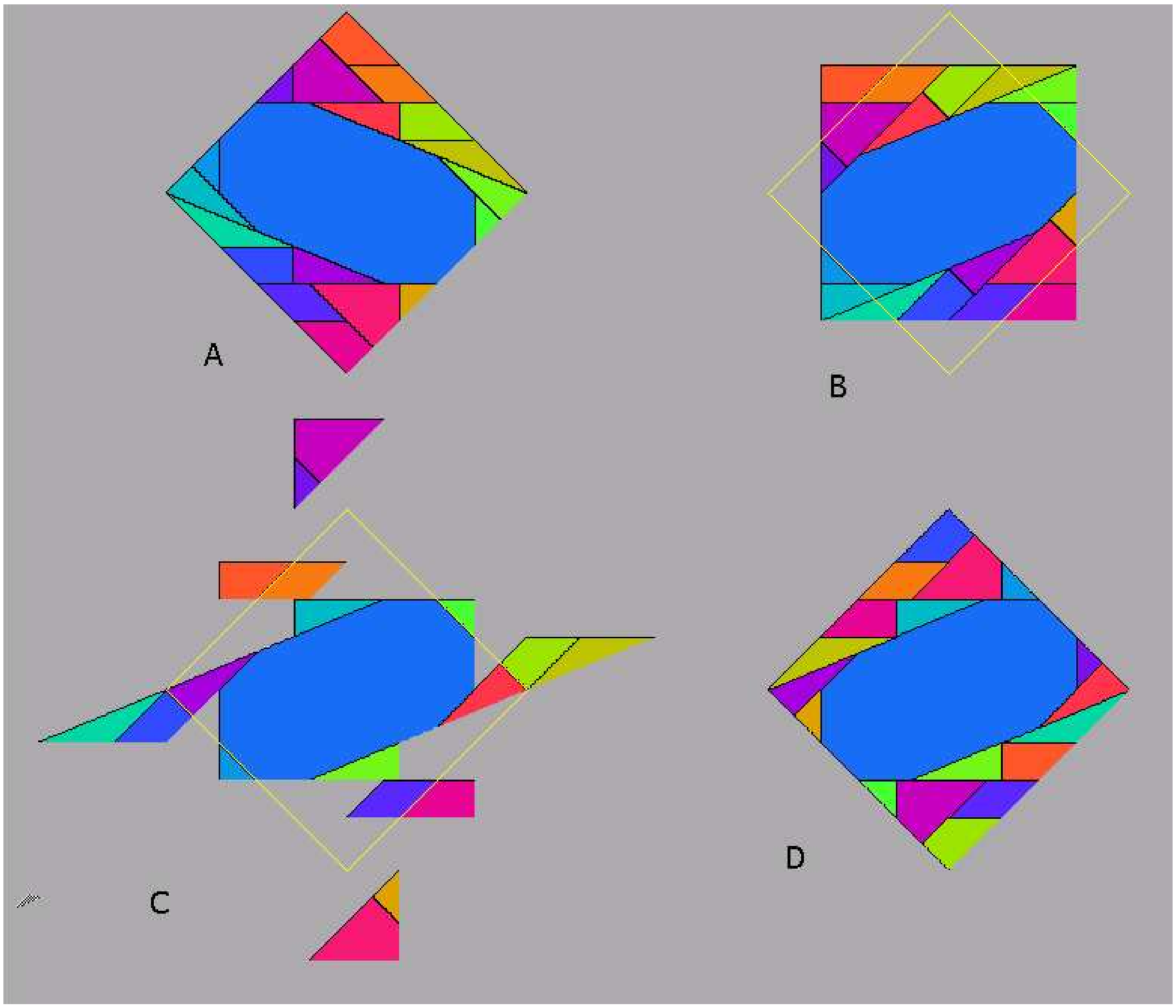

Abbildung 7: Die streifenweise Bijektion