

# Zwei Gitter, Bijektion und Quadratpuzzle

Klaus Nagel

9. Juli 2007

## 1 Einleitung

Dieser Aufsatz soll erklären, was das Quadratpuzzle mit der Bijektion zwischen zwei Gittern zu tun hat. Eine Einführung in das Problem steht in <http://nagel-klaus.homepage.t-online.de/Gitter.pdf>

Das Wesentliche wird hier wiederholt.

Am 4. Januar 2007 stellte Wolfgang Thumser dieses Problem in der Newsgroup `de.sci.mathematik` vor:

Man betrachte die Menge aller Gitterpunkte  $G := Z \times Z$  mit ganzzahligen Koordinaten und drehe all diese Punkte um  $45^\circ$  um den Ursprung. Die entstehende Menge der gedrehten Gitterpunkte sei  $H$ . Aus einem Grund, der sich immer zu wiederholen lohnt, gilt  $G \cap H = (0, 0)$ .  $G$  und  $H$  sind durch die Drehung bijektiv aufeinander abgebildet.

Hier kommt die Frage: Können  $G$  und  $H$  bijektiv auch so aufeinander abgebildet werden, daß sich der euklidische Abstand zwischen Punkt und Bildpunkt durch eine Konstante universell beschränken läßt?

## 2 Einleitung

Um beide Gitter gleichberechtigt zu behandeln, wird das  $G$ -Gitter um  $22.5^\circ$  nach links, das  $H$ -Gitter um den gleichen Winkel nach rechts gedreht.

Als Rastermaß wird nicht Eins gewählt, sondern  $1/\cos(22.5^\circ)$ ; das vereinfacht die Berechnungen. Der Grund für diese Wahl geht aus Abbildung 2 hervor. Man bildet horizontale Streifen  $S_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  der Breite 1 um die (gestrichelte) Zentrallinie  $y = i$ .  $G$ - und  $H$ -Linien laufen durch die entsprechenden Gitterpunkte und sind um  $\pm 22.5^\circ$  gegen die  $y$ -Achse geneigt. Auf jeder dieser Linien in jedem

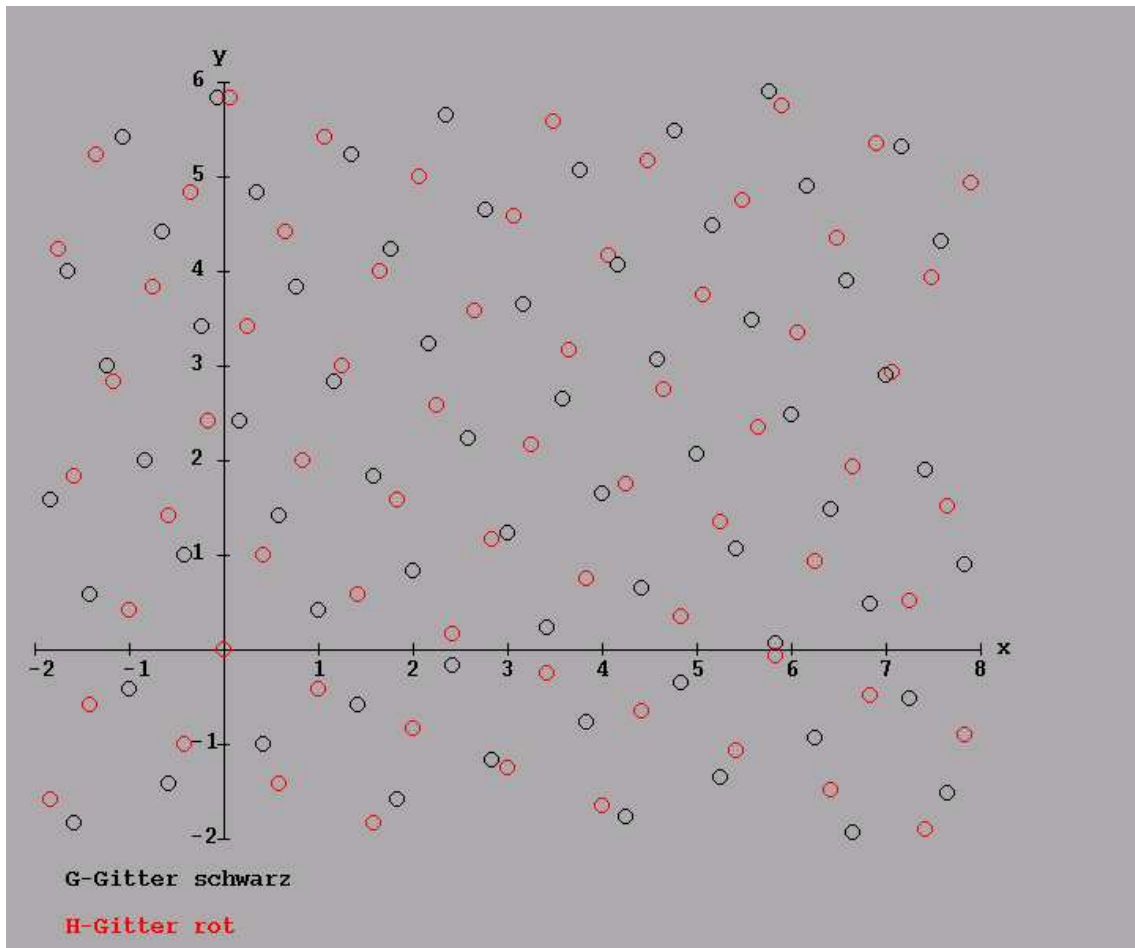


Abbildung 1: Darstellung der beiden Gitter.

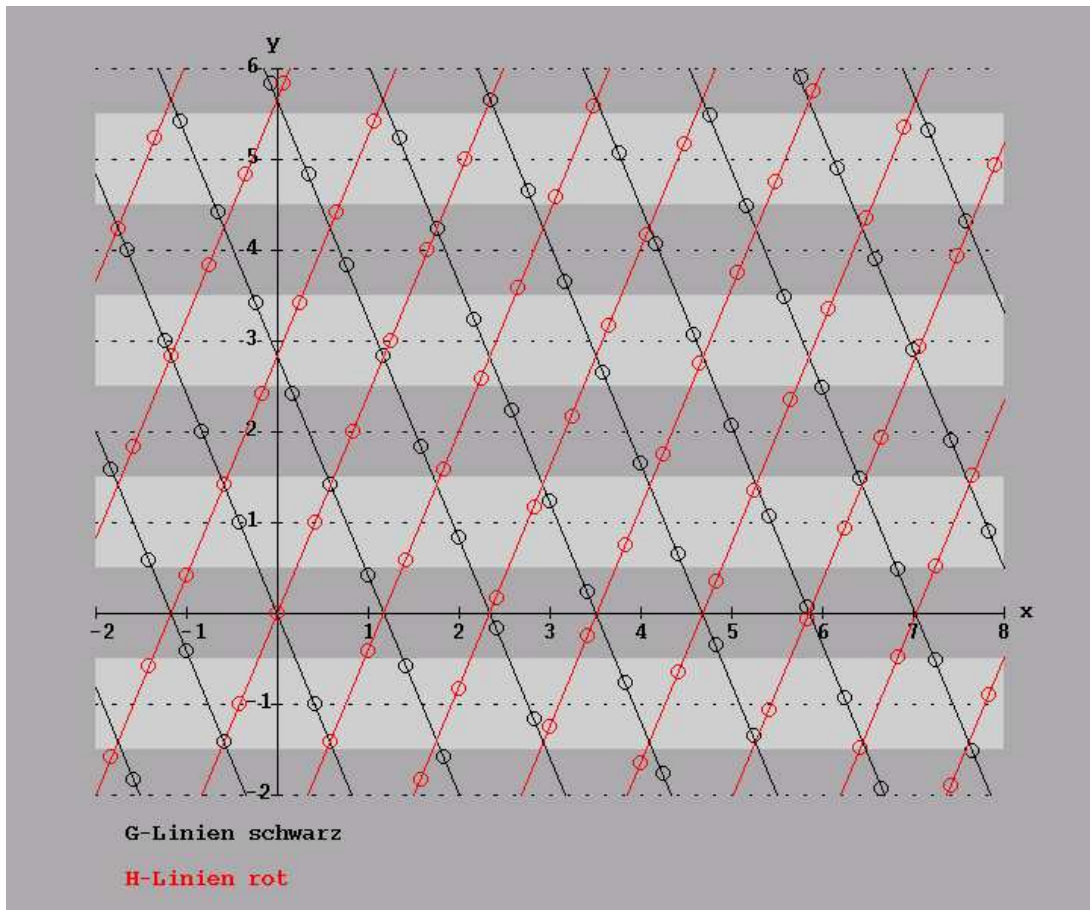


Abbildung 2: Streifen, G-Linien und H-Linien.

Streifen liegt genau ein Gitterpunkt. Nun läßt sich die streifenweise Bijektion definieren. Zu einem Punkt  $G$  im Streifen  $i$  bestimmt man die durch  $G$  gehende G-Linie und deren Schnittpunkt  $P$  mit der Zentrallinie  $y = i$ . Die H-Linie  $h$  mit dem nächstgelegenen Schnittpunkt  $Q$  ist eindeutig bestimmt. Der Punkt  $H$  auf  $h$  im Streifen  $i$  ist der Partner von  $G$ . In [1] wurde gezeigt, daß der Abstand zweier Partner bei der streifenweisen Bijektion kleiner als 1 ist, dieser Schranke aber beliebig nahe kommt.

Anmerkung: Bezogen auf das Rastermaß 1 wird diese Schranke zu  $\cos(22.5^0) = 0.92387$ .

### 3 Drehungen eines Gitters

Die Überlegungen für waagerechte Streifen gelten ebenfalls für senkrechte. Das führte zu

Lemma 1:

Sei  $D = (i, j)$  ein Punkt in der  $xy$ -Ebene, mit ganzzahligen  $i, j$  und  $(i + j)$  gerade. Eine  $45^0$ -Drehung um  $D$  führt das Gitter  $G$  in das Gitter  $H$  über.

Beweis:

Die Form der  $G$  und  $H$ -Punkte ist:

$$G = \begin{pmatrix} i - j \cdot T \\ j + i \cdot T \end{pmatrix} \quad i, j \text{ ganzzahlig} \quad (1)$$

$$H = \begin{pmatrix} k + l \cdot T \\ l - k \cdot T \end{pmatrix} \quad k, l \text{ ganzzahlig.} \quad (2)$$

Dabei ist  $T = \tan(22.5^0) = \sqrt{2} - 1$ . Es genügt zu zeigen, daß ein einziger  $G$ -Punkt, beispielsweise  $P = (0, 0)$  bei einer  $45^0$ -Drehung um  $D = (i, j)$  auf einen  $H$ -Punkt abgebildet wird. Eine Translation, die den Drehpunkt in den Nullpunkt schiebt, eine  $45^0$ -Drehung und abschließende Rücktranslation ergeben auf  $P$  angewandt :

$$\begin{pmatrix} W & -W \\ W & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 - i \\ 0 - j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \cdot (-i + j) + i \\ -W \cdot (i + j) + j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (j + i)/2 + (j - i)/2 \cdot T \\ (j - i)/2 - (j + i)/2 \cdot T \end{pmatrix}$$

mit  $W = \sqrt{2}/2 = (T + 1)/2$ .

Wenn  $i + j$  gerade ist, dann hat die rechte Seite genau die in (2) angegebene Form eines  $H$ -Punktes mit  $k = (j + i)/2$  und  $l = (j - i)/2$ , q.e.d.

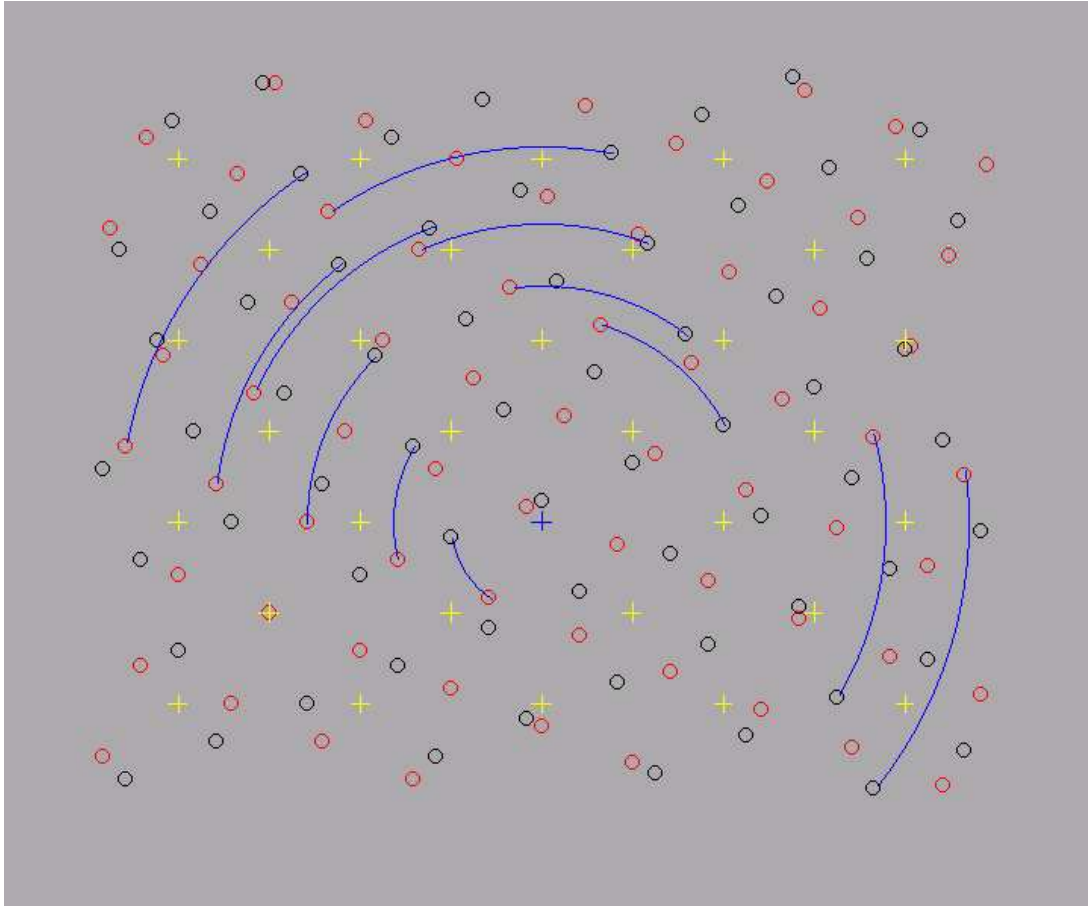


Abbildung 3: Drehpunkte und beispielhafte  $45^\circ$ -Drehungen.

Abbildung 3 erläutert diese Drehungen; sie zeigt die Lage einiger Drehpunkte (gelbe Kreuze) und für den ausgewählten Drehpunkt (1,3) (blaues Kreuz) einige  $45^\circ$ -Bögen, die von G-Punkten zu H-Punkten führen.

## 4 Alternative Beschreibung der Bijektionen

Lemma 1 ermöglicht es, zu einem beliebigen G-Punkt  $G$  mit bekannten Koordinaten, einen benachbarten H-Punkt  $H_0(G)$  zu finden. Man sucht dazu den zu  $G$  nächstgelegenen Drehpunkt  $D(G)$  und dreht  $G$  um  $45^\circ$  um  $D(G)$ . Für alle Punkte  $G$  in einem auf die Spitze gestelltem Quadrat (Karo) mit Halbdiaagonale 1 und um den Drehpunkt  $D$  als Zentrum ist  $D$  der nächstgelegene Drehpunkt. Abbildung 4 zeigt das Kachelmuster der Einzugsgebiete der Drehpunkte. Offensichtlich ist  $H_0(G)$  niemals weiter als 1 von  $G$  entfernt. In Abbildung 5 sind die G-

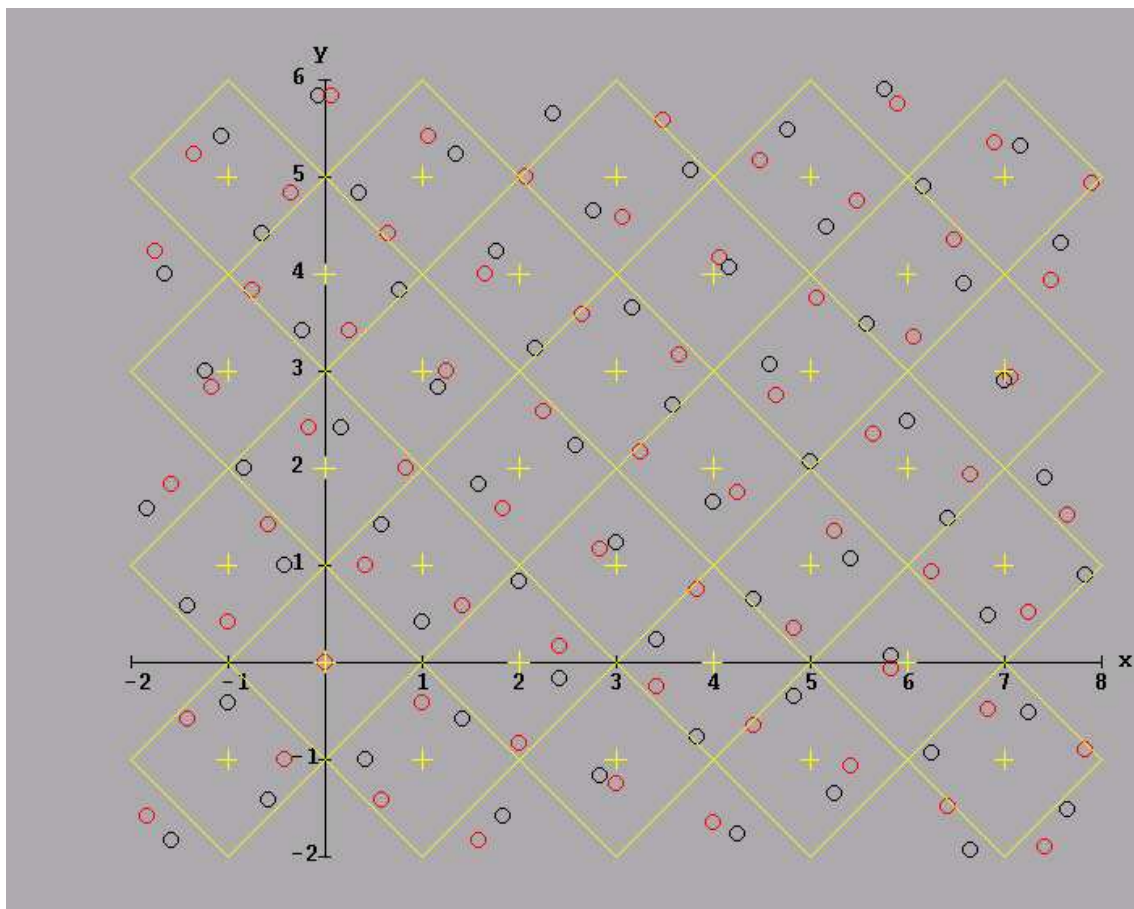


Abbildung 4: Drehpunkte mit ihren Einzugsgebieten.

Punkte  $G$  mit den zugehörigen  $H_0(G)$  verbunden. Man sieht, daß die Zuordnung  $G \rightarrow H_0(G)$  nicht zu einer Bijektion gemacht werden kann, denn verschiedene  $G$  haben gelegentlich das gleiche Bild.

Eine gegebene Bijektion läßt sich beschreiben, indem man den Bildpunkt  $H$  von  $G$  relativ zu  $H_0(G)$  angibt.

Sei  $G$  ein G-Punkt,  $D$  der nächstgelegene Drehpunkt. Eine Translation, die  $D$  in den Nullpunkt abbildet, führt  $G$  über in einen Punkt  $\tilde{G} \in K_0$ , wobei  $K_0$  das Karo um den Nullpunkt ist. Die Zuordnung  $G \rightarrow \tilde{G}$  wird Projektion  $P$  genannt, sie ist wegen der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  eindeutig. Entsprechend werden die Bildpunkte  $H$  durch solche Projektionen eineindeutig nach  $\tilde{H} \in K_0$  abgebildet. Der gegebenen Bijektion  $B$  zwischen den G- und H-Gitterpunkten entspricht also eine Bijektion  $\tilde{B}$  zwischen den Projektionen  $\tilde{G}$  und  $\tilde{H}$ . Wie auch  $B$  besteht  $\tilde{B}$  aus einer  $45^\circ$ -Drehung, einer anschließender Translation  $V$  (mit Translationsvektoren

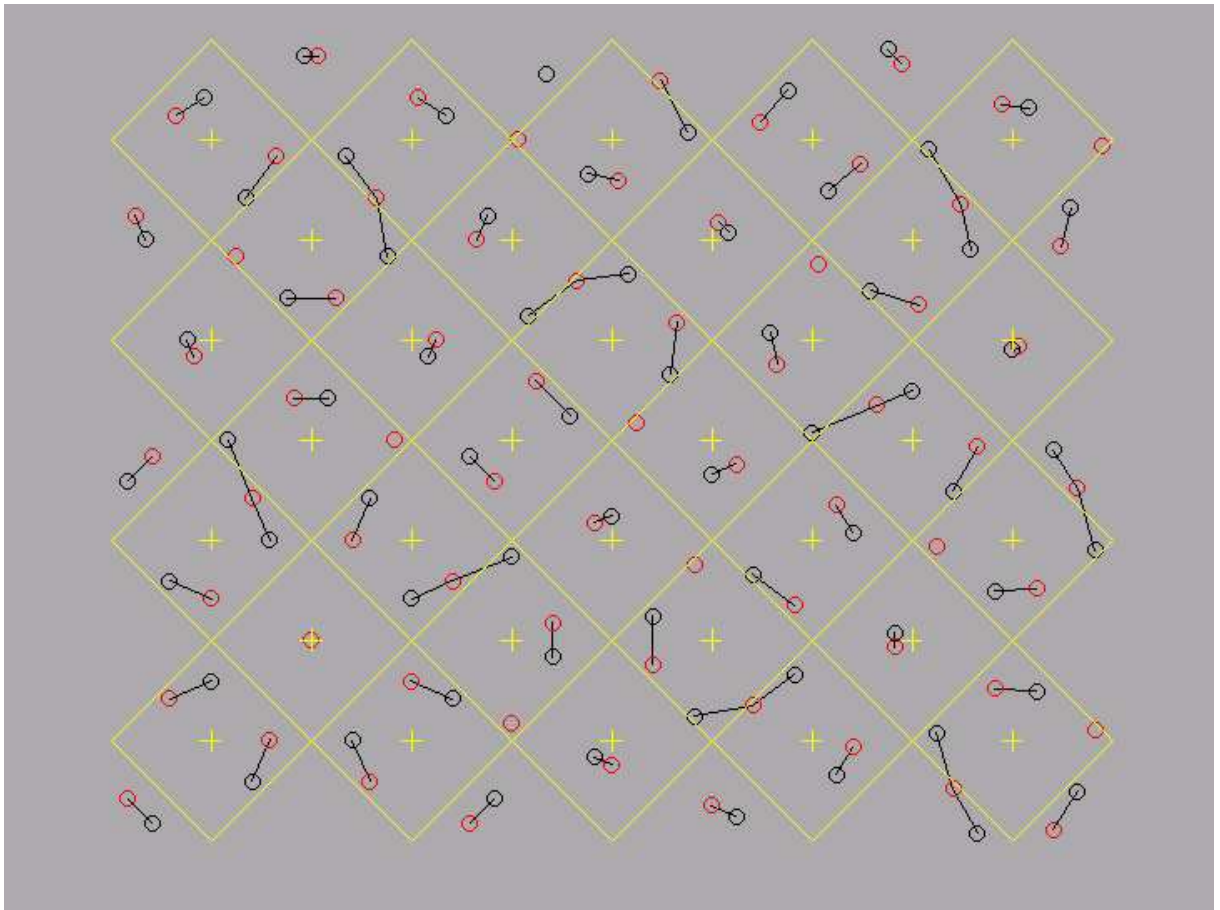


Abbildung 5: Die Zuordnung  $G \longrightarrow H_0(G)$ .

aus dem H-Raster) und einer abschließenden Projektion  $P$  in  $K_0$ . Die Drehung ist in allen Fällen gleich, das Bild der Drehung von  $\tilde{G}$  sei  $\hat{G} \in \hat{K}_0$ . Die Bijektion ist daher allein bestimmt durch  $P \cdot V$ , die Punkte aus dem achsenparallelen Quadrat  $\hat{K}_0$  in ein Karo abbilden.

## 5 Spezielle Bijektionen

Der Übergang von der Bijektion  $B$  zu  $\tilde{B}$  bringt keine Erleichterung, wenn man statt zwischen den Gitterpunkten  $G$  und  $H$  die Zuordnung zwischen ihren Projektionen  $\tilde{G}$  und  $\tilde{H}$  einzeln festlegen muß. Anders ist es, wenn es gelingt, wenige zusammenhängende Gebiete jeweils einheitlich abzubilden. Wenn wir uns auf Bijektionen mit kurzen Abständen beschränken, dann kommt als Bild von  $G$  nur  $H_0(G)$  selbst mit seinen acht Nachbarn  $H_1, H_2, \dots, H_8$  in Frage (Abbildung 6). Das soll an Abbildung 7 erklärt werden. Bild A zeigt das Karo  $K_0$ , zu jedem Punkt wurde der gedrehte Punkt  $H_0$  bestimmt und dessen Nachbarn  $H_1, H_2, \dots, H_8$ . Aus diesen  $H$ -Punkten wurde der Partner von  $G$  bei der streifenweisen Bijektion bestimmt, er muß also im gleichen Streifen liegen wie  $G$  und seine  $H$ -Linie muß die zugehörige Zentrallinie im geringsten Abstand vom Schnittpunkt der  $G$ -Linie schneiden. Aus dem Streifen und der Nummer des Nachbarn wurde die Farbe festgelegt, die in allen Bildern für die entsprechenden Gebiete benutzt wird. Bild B zeigt das um  $45^\circ$  gedrehte Karo  $\hat{K}_0$ . In Bild C wurden die Verschiebung um den  $H_i$ -Wert angebracht und Bild D wurden die Werte auf  $K_0$  projiziert.

Beim Vergleich der Bilder A und C in Abbildung 7 sieht man, daß Eins der größte Abstand zwischen den Partnern ist, entsprechende Stellen in gleichfarbigen Gebieten.

## 6 Weiteres Vorgehen

Als nächstes soll festgestellt werden, wie sich Abbildung 7 ändert, wenn die von Rainer Rosenthal vorgeschlagenen lokalen Verbesserungen angebracht werden. Vielleicht läßt sich eine Übersicht über die möglichen Bijektionen finden und meine Vermutung bestätigen, daß  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}} = 0.9262$  die kleinste Schranke ist. Bezogen auf das Rastermaß 1 ist das 0.8557.

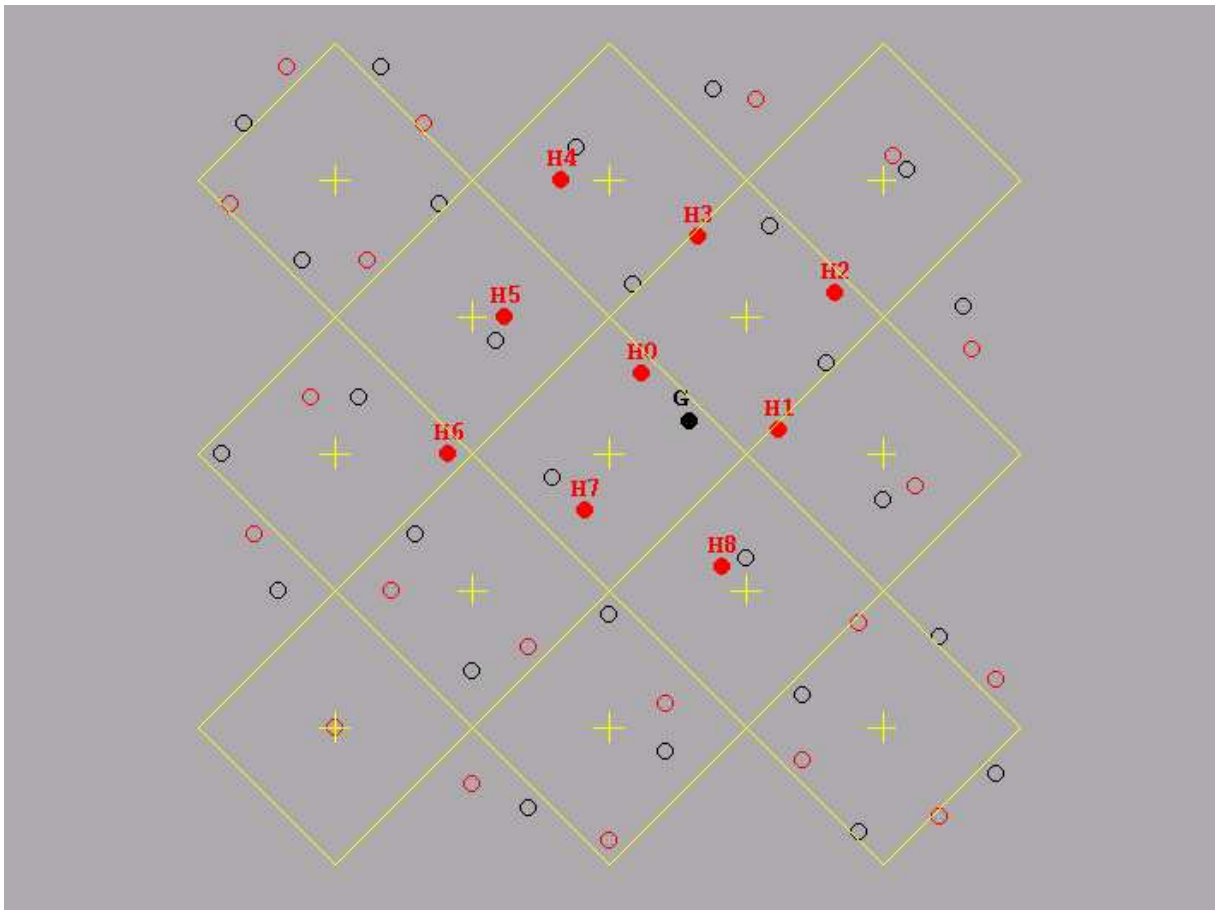


Abbildung 6: Mögliche Bilder  $H_0, H_1, \dots, H_8$  von  $G$ .

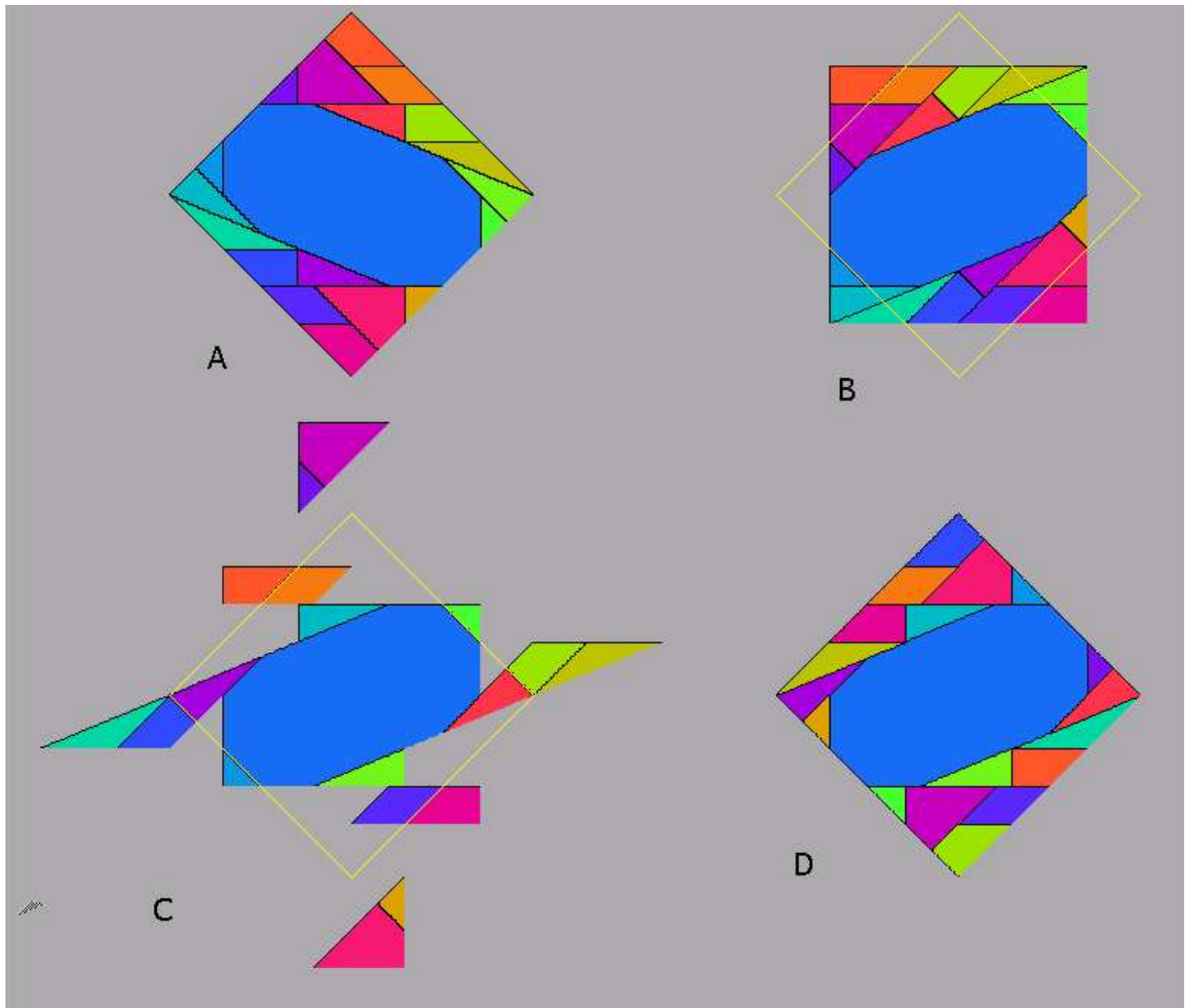


Abbildung 7: Die streifenweise Bijektion